TITLE:
Behavior of harmonic maps into spheres around their isolated singular points (On well-posedness and regularity of solutions to partial differential equations)

AUTHOR(S):
中島, 徹

CITATION:
中島, 徹. Behavior of harmonic maps into spheres around their isolated singular points (On well-posedness and regularity of solutions to partial differential equations). 数理解析研究所講究録 2002, 1284: 32-41

ISSUE DATE:
2002-09

URL:
http://hdl.handle.net/2433/42415

RIGHT:

京都大学学術情報リポジトリ
KURENAI 紅
Kyoto University Research Information Repository

数理解析研究所講究録 1284 巻 2002 年 32-41

Behavior of harmonic maps into spheres around their isolated singular points

by Tôru Nakajima
中島 徹

Mathematical Institute of Tohoku University
東北大学大学院理学研究科*

1 Introduction

$\Omega\subset\mathbb{R}^m$ を有界領域として、$\mathbb{S}^n$ を n 次元の原点を中心とする単位球面とする。また、Ω から $\mathbb{S}^m$ への Sobolev 写像の全体を

$$W^{1,2}(\Omega,\mathbb{S}^n)=\{u\in W^{1,2}(\Omega,\mathbb{R}^{n+1})\mid |u(x)|=1\quad \text{a.e.}\}$$

とする。
以下では、 Dirichlet 汎関数 $\mathbb{E}:W^{1,2}(\Omega,\mathbb{S}^n)\to\mathbb{R}$

$$\mathbb{E}(u)=\frac{1}{2}\int_\Omega|\nabla u|^2\,dx$$

$$\nabla u=\left(\frac{\partial u^i}{\partial x^\alpha}\right),\quad |\nabla u|^2=\sum_{\alpha=1}^{m}\sum_{i=1}^{n+1}\left(\frac{\partial u^i}{\partial x^\alpha}\right)^2$$

の最小点の性質について興味を持つ。

Definition 1 (energy minimizing map)
$v-u\in W_0^{1,2}(\Omega,\mathbb{R}^{n+1})$ を満たす任意の $v\in W^{1,2}(\Omega,\mathbb{S}^n)$ に対して

$$\mathbb{E}(v)\le\mathbb{E}(u)$$

となるとき、u を energy minimizing map と呼ぶ。

*現在の所属；北海道大学大学院理学研究科

Remark 1 energy minimizing map は調和関数の一般化と考えられる。しかし、調和関数の場合と異なり一般に連続ではない。代表的な例として、次がある。

$$x/|x| \in W^{1,2}(\mathbb{B}^m, \mathbb{S}^{m-1}) \quad (\mathrm{m} \geq 3).$$

この写像は energy minimizing map となることが知られているが、明らかに原点において連続ではない。

energy minimizing map の不連続点のことを特異点 (singular point) と呼ぶ。energy minimizing map の研究では、定義域及び値域となる多様体が energy minimizing map の特異点にどのように影響を及ぼすかというのが一つの研究テーマである。今のところ energy minimizing map の具体例はあまり知られていないため、$x/|x|$ のような扱いやすい (と、思われる) 写像を徹底的に調べあげることは非常に重要と思われる。

自然な問題意識として、energy minimizing map はどのような特異点を持ちうるか？という問題を考えたい。言い替えれば特異点を「分類」することを目標とする。ただし、定義域及び値域となる多様体によって素性の良い「分類」をしなければならない。次の定理はこのような素性の良い分類を与えるものと考えられる。

Theorem 1 (Brezis-Coron-Lieb [1])
$\Omega \subset \mathbb{R}^3$ を有界領域をして、$u \in W^{1,2}(\Omega, \mathbb{S}^2)$ を energy minimizing map, $a \in \Omega$ を u の特異点とする。(このとき、a は孤立特異点となることが知られている。)

(1) u の a における写像度 $\deg(u, a)$ は、± 1 となる。

(2) さらにある回転行列 $R \in O(3)$ が存在して、写像 $u_{a,\rho} \in W^{1,2}(\mathbb{B}^3, \mathbb{S}^2)$ $(\rho > 0)$ は $\rho \to 0$ なるとき、$Rx/|x|$ に $\mathbb{B}^3 \backslash \{0\}$ 上、局所一様収束する。
ここで、写像 $u_{a,\rho} \in W^{1,2}(\mathbb{B}^3, \mathbb{S}^2)$ は

$$u_{a,\rho}(x) = u(a + \rho x)$$

で定義される写像のことである。

Remark 2 ここで、写像度 $\deg(u, a)$ の定義を述べる。a は孤立した特異点であるから、$\sigma > 0$ を十分小さくとれば、u は、$\overline{\mathbb{B}^3_\sigma(a)} \backslash \{a\}$ 上連続となる。このとき、u を $\partial \mathbb{B}^3_\sigma(a)$ に制限した写像

$$u|_{\partial \mathbb{B}^3_\sigma(a)} : \partial \mathbb{B}^3_\sigma(a) \to \mathbb{S}^2$$

の写像度を u の a での写像度と呼ぶ。これは $\sigma > 0$ のとり方に依らない。

Theorem 1 は、energy minimizing map の singular point の近傍での挙動がわかるという点で、singular point の分類として非常にすぐれたものである。

Theorem 1 からの自然な問題意識として、このようなことは、高次元の場合も成立するかというものがある。つまり、$\Omega \subset \mathbb{R}^m$ を有界領域、$u \in W^{1,2}(\Omega, \mathbb{S}^{m-1})$ を energy minimizing map、$a \in \Omega$ を u の孤立特異点としたとき、u の a での写像度はどのようになるか？ という問題を考える。ここで、Brezis-Coron-Lieb の論文では、定義域が 3 次元であること、および値域が 2 次元球面であることが有効に用いられているため、彼等の手法をそのまま高次元の場合に適用することは困難であると考えられる。(この事情については、section 3 において述べる。) しかしとある事情によって、次が得られた。

Theorem 2 (N)
$\Omega \subset \mathbb{R}^4$ を有界領域として、$u \in W^{1,2}(\Omega, \mathbb{S}^3)$ を energy minimizing map, $a \in \Omega$ を u の特異点とする。(このとき、a は孤立特異点となることが知られている。)

(1) u の a での写像度は、0 又は ± 1 となる。

(2) もし u の a での写像度が ± 1 ならば、ある回転行列 $R \in O(4)$ が存在して、写像 $u_{a,\rho} \in W^{1,2}(\mathbb{B}^4, \mathbb{S}^3)$ $(\rho > 0)$ は $\rho \to 0$ なるとき、$Rx/|x|$ に $\mathbb{B}^4 \backslash \{0\}$ 上、局所一様収束する。

Remark 3 Theorem 1 と Theorem 2 を比べると、次元によって特異点の性質が変わらないように見える。しかし、その証明において用いる事実は全く異なるものである。

2 Harmonic maps

以下、Theorem 1 , Theorem 2 の証明のスケッチを見ていくわけであるが、ここではその際必要となる種々の定義などをする。まず、Dirichlet 汎関数についての Euler-Lagrange 方程式を求める。考察する変文は以下の 2 つである。

(1) $u \in W^{1,2}(\Omega, \mathbb{S}^n)$, $\phi \in C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}^{n+1})$ に対して、

$$u_t(x) = \frac{u(x) + t\phi(x)}{|u(x) + t\phi(x)|}$$

(2) $u \in W^{1,2}(\Omega, \mathbb{S}^n)$, $\eta \in C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}^m)$ に対して、

$$u^t(x) = u(x + t\eta(x))$$

とする。

このとき、以下の式を得る。

$$\frac{d}{dt}\mathbb{E}(u_t)\bigg|_{t=0} = \int_\Omega \{\langle \nabla u, \nabla \phi \rangle - |\nabla u|^2 (u, \phi)\}\, dx$$

ここに

$$\langle \nabla u, \nabla \phi \rangle = \sum_{\alpha=1}^{m} \sum_{i=1}^{n+1} \frac{\partial u^i}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \phi^i}{\partial x^\alpha}, \qquad (u, \phi) = \sum_{i=1}^{n+1} u^i \phi^i.$$

$$\frac{d}{dt}\mathbb{E}(u^t)\bigg|_{t=0} = \frac{1}{2}\int_\Omega \left\{ |\nabla u|^2 \mathrm{div}(\eta) - 2 \sum_{\alpha,\beta=1}^{m} \left(\frac{\partial u}{\partial x^\alpha}, \frac{\partial u}{\partial x^\beta} \right) \frac{\partial \eta^\alpha}{\partial x^\beta} \right\} dx.$$

ここで、Dirichlet 汎関数の停留点である、weakly harmonic map, stationary harmonic map を定義する。

Definition 2 (weakly harmonic map, stationary harmonic map)
(1) u が weakly harmonic map であるとは、

$$\int_\Omega \{\langle \nabla u, \nabla \phi \rangle - |\nabla u|^2 (u, \phi)\} = 0 \tag{2.1}$$

が、任意の $\phi \in C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}^{n+1})$ について成立することをいう。
(2) u が stationary harmonic map であるとは、u が weakly harmonic map であり、さらに

$$\int_\Omega \left\{ |\nabla u|^2 \mathrm{div}(\eta) - 2 \sum_{\alpha,\beta=1}^{m} \left(\frac{\partial u}{\partial x^\alpha}, \frac{\partial u}{\partial x^\beta} \right) \frac{\partial \eta^\alpha}{\partial x^\beta} \right\} dx = 0 \tag{2.2}$$

が、任意の $\eta \in C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n)$ について、成立することをいう。

Remark 4 weakly harmonic map の方程式において、非線形項 $|\nabla u|^2 u$ があらわれるのは、写像が球面に値をとっているという制限からきている。球面以外のコンパクトリーマン多様体に値をとる調和写像の方程式は非線形項が多様体によって変わってくることになる。一方 stationary harmonic map の方程式では、値域となる多様体の情報は含まれていない。

Remark 5 energy minimizing map は、stationary harmonic map であり、stationary harmonic map は、weakly harmonic map である。しかし、逆は一般には成立しない。

ここで正則性についての結果を述べておく。
$\mathrm{Reg}(u) = \{x \in \Omega | u \text{ is continuous at } x\}$
$\mathrm{Sing}(u) = \Omega \backslash \mathrm{Reg}(u)$ とする。

Theorem 3 (Schoen [5])
$u \in W^{1,2}(\Omega, \mathbb{S}^n)$ が weakly harmonic map ならば、u は $\mathrm{Reg}(u)$ 上滑らかである。

よって、weakly harmonic map の正則性の研究においては、不連続点の解析が中心となる。
上の正則性の結果より簡単な計算で次が従う。

Theorem 4 $u \in W^{1,2}(\Omega, \mathbb{S}^n)$ が連続な weakly harmonic map であるとする。このとき、u は stationary harmonic map である。

解析的には、weakly harmonic map , stationary harmonic map, energy minimizing map にはどれくらいの差があるのか？という問題は自然であり、次の定理は非常に興味深い。(これは、Smith の結果 [6] より従う。)

Theorem 5 $3 \leq m \leq 8$ とする。任意の $d \in \mathbb{Z} \backslash \{0\}$ に対して、ある weakly harmonic map $u \in W^{1,2}(\mathbb{B}^m, \mathbb{S}^{m-1})$ が存在して、以下を満たす。
(1) u は原点 0 にのみ特異性を持つ。
(2) u の 0 での写像度 $\deg(u, 0)$ は、d である。
さらに、もし $4 \leq m \leq 8$ ならば、(1),(2) を満たす stationary harmonic map が存在する。

$m = 3, 4$ のときを考えると、Dirichlet 汎関数の最小性が特異性の性質に強い影響を及ぼすことがわかる。

次に球面間の調和写像について述べる。球面間の写像についての Dirichlet 汎関数の Euler-Lagrange 方程式を求めることにより次の定義にいきつく。

Definition 3 $u \in C^\infty(\mathbb{S}^m, \mathbb{S}^n)$ が smooth harmonic map であるとは、u が次を満たすこととする。

$$\Delta_{\mathbb{S}^m} u + |\nabla_{\mathbb{S}^m} u|^2 u = 0 \quad \text{in } \mathbb{S}^m.$$

ここで、$\Delta_{\mathbb{S}^m}$ は $\mathbb{S}^m$ 上の Laplacian, $\nabla_{\mathbb{S}^m}$ は $\mathbb{S}^m$ 上の gradient.

最期に weakly harmonic map の安定性を定める。
$u \in W^{1,2}(\Omega, \mathbb{S}^n)$ を $\mathrm{Sing}(u)$ が有限集合となる weakly harmonic map とする。
$\psi \in C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}^{n+1})$ を $(u(x), \psi(x)) = 0$ (a.e. $x \in \Omega$) 満たす写像とする。ここで直行性の条件は、u を球面の接方向への変文を考察するためにつけられた条件である。このとき次を得る。

$$\delta_u^2 \mathbb{E}(\psi) = \frac{d^2}{dt^2}\mathbb{E}(u_t)\bigg|_{t=0} = \int_\Omega \{|\nabla\psi|^2 - |\nabla u|^2|\psi|^2\}\, dx \tag{2.3}$$

Definition 4 $u \in W^{1,2}(\Omega, \mathbb{S}^n)$ を $\mathrm{Sing}(u)$ が有限集合となる、weakly harmonic map とする。

$$\delta_u^2 \mathbb{E}(\psi) \geq 0$$

が、$(u(x), \psi(x)) = 0$ a.e. $x \in \Omega$ なる任意の $\psi \in C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}^{n+1})$ について成立するとき、u は weakly stable であるという。そうでないとき、unstable であるという。

3 Sketch of Proof of Theorem 1

ここでは、Brezis-Coron-Lieb の定理の証明のスケッチを述べる。以下簡単のため、扱う energy minimizing map は $u \in W^{1,2}(\mathbb{B}^3, \mathbb{S}^2)$ なるもので、原点 0 にのみ特異性を持つものとする。さらに u は homogeneous と仮定する。つまり、

$$\frac{\partial u}{\partial r} = 0 \quad \text{in } \mathbb{B}^3 \backslash \{0\}$$

とする。ここに $r = |x|$. energy minimizing map の理論における、blow-up という手法によって、このように仮定してよい。このとき、ある写像 $u_0 \in C^\infty(\mathbb{S}^2, \mathbb{S}^2)$ が存在して、

$$u(x) = u_0\left(\frac{x}{|x|}\right) \quad \text{in } \mathbb{B}^3 \backslash \{0\}$$

となる。このとき、u は weakly harmonic map であるから、次が成立する。

$$\Delta u + |\nabla u|^2 u = 0 \quad \text{in } \mathcal{D}'(\mathbb{B}^3).$$

よって、$u(x) = u_0(x/|x|)$ より次を得る。

$$\Delta_{\mathbb{S}^2} u_0 + |\nabla_{\mathbb{S}^2} u|^2 u = 0 \quad \text{in } \mathbb{S}^2.$$

つまり、u_0 は $\mathbb{S}^2$ 間の smooth harmonic map である。よって、次の対応がつく。

$$\begin{aligned}&(\text{homogeneous weakly harmonic map from } \mathbb{B}^3 \text{ into } \mathbb{S}^2)\\ \longleftrightarrow\ &(\text{smooth harmonic map between } \mathbb{S}^2).\end{aligned}$$

よって問題は、$\mathbb{S}^2$ 間の smooth harmonic map u_0 の、homogeneous extension $u(x) = u_0(x/|x|)$ は、いつ energy minimizing map となるか？ということになる。ここで、$\mathbb{S}^2$ 間の smooth harmonic map について、次がしられている。

Theorem 6 $u_0 \in C^\infty(\mathbb{S}^2, \mathbb{S}^2)$ とする。このとき、次の (1) と (2) は同値。
(1) u_0 は smooth harmonic map
(2) u_0 は holomorphic 又は、anti-holomorphic.

これと次の定理を組み合わせることにより、Theorem 1 が示される。

Theorem 7 $u_0 \in C^\infty(\mathbb{S}^2, \mathbb{S}^2)$ を smooth harmonic map とする。このとき、u_0 の homogeneous extension u が stationary harmonic map であるための必要十分条件は次が成立すること。

$$\int_{\mathbb{S}^2} |\nabla_{\mathbb{S}^2} u_0|^2 \omega \, d\omega = 0. \tag{3.1}$$

Proof
$\epsilon > 0$ を十分小として、cut-off function χ_ϵ を、$\chi_\epsilon(r) = 0$ $(0 \le r \le \epsilon)$, $= \epsilon^{-1} r - 1$ $(\epsilon \le r \le 2\epsilon)$, 1 $(r \ge 2\epsilon)$ で定める。u は $\mathbb{B}^3_1(0) \backslash \mathbb{B}^3_{2\epsilon}(0)$ 上連続であるから、ここでは stationary harmonic map である。よって任意の $\eta \in C^\infty_0(\mathbb{B}^3_1(0), \mathbb{R}^3)$ に対して次を得る。

$$\int_{\mathbb{B}^3_1(0)\backslash \mathbb{B}^3_{2\epsilon}(0)} \left\{ |\nabla u|^2 \mathrm{div}(\chi_\epsilon \eta) - 2 \left(\frac{\partial u}{\partial x^\alpha}, \frac{\partial u}{\partial x^\beta} \right) \frac{\partial}{\partial x^\beta}(\chi_\epsilon \eta) \right\} dx = 0. \tag{3.2}$$

この式において、$\epsilon \to 0$ とする。ここで u が homogeneous であることより次が得られる。

$$\mathrm{div}(\chi_\epsilon \eta) = \chi_\epsilon \mathrm{div}(\eta) + \chi'_\epsilon(r) \left(\frac{x}{r}, \eta \right)$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x^\alpha}, \frac{\partial u}{\partial x^\beta} \right) \frac{\partial}{\partial x^\beta}(\chi_\epsilon \eta^\alpha) = \chi_\epsilon \left(\frac{\partial u}{\partial x^\alpha}, \frac{\partial u}{\partial x^\beta} \right) \frac{\partial \eta^\alpha}{\partial x^\beta}$$

よって、(3.2) は次のようになる。

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{B}_1^3(0)\setminus\mathbb{B}_{2\epsilon(0)}^3}\chi_\epsilon\left\{|\nabla u|^2\mathrm{div}(\eta)\left(-2\frac{\partial u}{\partial x^\alpha},\frac{\partial u}{\partial x^\beta}\right)\frac{\partial\eta^\alpha}{\partial x^\beta}\right\}dx\\ -2\int_{\mathbb{B}_1^3(0)\setminus\mathbb{B}_{2\epsilon}^3(0)}|\nabla u|^2\chi_\epsilon'(r)\left(\frac{x}{r},\eta\right)dx=0\end{aligned}\tag{3.3}$$

ここで、定義域が 3 次元であることがきいてきて次が成立する。

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{B}_1^3(0)}|\nabla u|^2\chi_\epsilon'(r)\left(\frac{x}{r},\eta\right)dx&=\int_{\mathbb{S}^2}|\nabla_{\mathbb{S}^2}u_0|^2\left(\frac{1}{2\epsilon}\int_\epsilon^{2\epsilon}\eta(r\omega)\,dr,\omega\right)d\omega\\ &\to\left(\int_{\mathbb{S}^2}|\nabla_{\mathbb{S}^2}u_0|^2\omega\,d\omega,\eta(0)\right)\end{aligned}$$

$\eta\in C_0^\infty(\mathbb{B}_1^3(0),\mathbb{R}^3)$ は任意であるから、求める結果を得る。

Remark 6 上の証明において、値域が球面であるということは全く使われていない。よって、これは定義域が 3 次元の場合の energy minimizing map の研究において有効となると思われる。一方定義域が 4 次元以上の場合には、u は stationary harmonic map となってしまう。つまり、定義域が 3 次元のときは定義域での変文に関して Dirichlet 汎関数の停留点となるという条件は非常に強い条件であるといえる。

4 Sketch of Proof of Theorem 2.

ここでは、Theorem 2 の証明のスケッチを与える。Theorem 1 の場合と同様にして、energy minimizing map $u\in W^{1,2}(\mathbb{B}^4,\mathbb{S}^3)$ で、原点のみに特異性を持ち、ある smooth harmonic map $u_0\in C^\infty(\mathbb{S}^3,\mathbb{S}^3)$ に対して $u(x)=u_0(x/|x|)$ なるものを扱う。残念ながら、$\mathbb{S}^2$ 間の場合と異なり、$\mathbb{S}^3$ 間の smooth harmonic map の分類についての結果はしられてはいない。よって u_0 の形状を露骨に使うということはできない。また前 section で述べたように u は stationary harmonic map になるので、Brezis-Coron-Lieb の証明をそのまま適用出来ない。

しかし球面間の smooth harmonic maps のエネルギーについての性質を用いることによって写像度の解析を行うことが出来る。

Theorem 8 (Ramanathan, [4])
$m\geq 3$ として、$u_0\in C^\infty(\mathbb{S}^m,\mathbb{S}^n)$ を smooth harmonic map とする。また、G

を $\mathbb{S}^m$ の間の向きを保つ共形的な微分同相写像の全体のなす群とする。このとき、次が成立する。

$$\mathbb{E}_{\mathbb{S}^m}(u_0) = \operatorname*{Sup}_{g \in G} \mathbb{E}_{\mathbb{S}^m}(u_0 \circ g)$$

ここで、$\mathbb{E}_{\mathbb{S}^m}$ は次で与えられるものする。

$$\mathbb{E}_{\mathbb{S}^m}(u_0) = \int_{\mathbb{S}^m} |\nabla_{\mathbb{S}^m} u_0|^2 \, d\omega.$$

さらにもし

$$\mathbb{E}_{\mathbb{S}^m}(u_0) = \mathbb{E}_{\mathbb{S}^m}(u_0 \circ g)$$

が、ある $g \in G$ について成立すれば、$g \in SO(m+1)$ である。

Theorem 2 の証明に必要な補題を一つ用意する。

Lemma 1 $u \in W^{1,2}(\Omega, \mathbb{S}^n)$ を Sing(u) が有限集合となる weakly harmonic map とする。もし u が weakly stable ならば、

$$\frac{n-3}{n-1} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 |f|^2 \le \int_{\Omega} |\nabla f|^2 \, dx$$

が、任意の $f \in C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ について成立する。

Sketch of Proof of Lemma
Step 1. 任意の $\psi \in C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}^{n+1})$ について、$\tilde{\psi} = \psi - (u, \psi)u$ とおき、これを weak stability の式に代入する。
Step 2. 任意の $f \in C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ に対して $\psi = f \mathbf{e}_\alpha$ とおいて、Step 1 の式に代入する。ここで、$\{\mathbf{e}_\alpha\}$ は R^{n+1} の基底とする。そして、α について足しあわせる。

Sketch of Proof of Theorem 2
Lemma により、次が成立。

$$\frac{1}{3} \int_{\mathbb{B}_1^4(0)} |\nabla u|^2 |f|^2 \, dx \le \int_{\mathbb{B}_1^4(0)} |\nabla f|^2 \, dx.$$

ここで、$h \in C_0^\infty(0,1)$ に対して、$f(x) = h(|x|)$ とすると、次を得る。

$$\omega_3 \int_0^1 r^3 |h'|^2 \, dr \le \frac{1}{3} \left(\int_{\mathbb{S}^3} |\nabla_{\mathbb{S}^3} u_0|^2 \, d\omega \right) \left(\int_0^1 r |f|^2 \, dr \right).$$

ここで、ω_3 は $\mathbb{S}^3$ の volume. よって、 Hardy の不当式の best constant により次を得る。

$$\int_{\mathbb{S}^3} |\nabla_{\mathbb{S}^3} u_0|^2 \leq 3\omega_3.$$

ここで、$\deg(u_0) \neq 0$ ならば、ある $g \in G$ が存在して次を満たす。

$$\int_{\mathbb{S}^3} u_0 \circ g \, d\omega = 0.$$

これと Theorem をあわせると、$u_0 \circ g$ が $x^\alpha|_{\mathbb{S}^3}$ $(1 \leq \alpha \leq 4)$ の一次結合であらわせることが分かる。

References

[1] H. Brezis, J. M. Coron & E. Lieb, *Harmonic maps with defects.* Comm. Math. Phys. **107**, (1986), 649–705.

[2] F. H. Lin, *Une remarque sur l'application* $x/|x|$. C. R. Acad. Sci. Paris. Sér A. **305**, (1987), 529–531.

[3] T. Nakajima, *Stability and singularity of harmonic maps into 3-spheres.* submitted to Nonlinear Anal.

[4] J. Ramanathan, *A remark on the energy of harmonic maps between spheres.* Rocky. Mount. J. Math. **16**, (1986), 783–790.

[5] R. Schoen, *Analytic aspects of harmonic map problem.* In "Seminar on Nonlinear Partial Differential Equations" (ed.: S. S. Chern), 321–358, Math. Sci. Res Inst. Publ. **2**, Springer, New York Berlin, 1984.

[6] R. T. Smith, *Harmonic mappings of spheres.* Amer. J. Math. **97**, (1975), 364–385.